

Hoe leerlingen nadenken en leren

We beginnen onze reis door in de hoofden van leerlingen te kijken, door stil te staan bij hoe ze nadenken en leren, en wat hiervan de implicaties zijn voor de lesvoorbereiding, de lesinhoud en de introductie van wiskundige concepten.

1.1 Een simpel model van nadenken en leren

WAT IK VROEGER DACHT

De volgende 21 woorden die ik opschrijf, zijn wellicht verontrustend: *In de eerste twaalfjaar die ik heb lesgegeven, heb ik nooit echt stilgestaan bij hoe mijn leerlingen nadenken en leren.*

Ik had wel een vage notie van concepten als het werkgeheugen of schema's – waarbij 'vaag' het belangrijkste woord is. Dus ik deed gewoon mijn ding, in gelukzalige onwetendheid, en baseerde me op mijn intuïtie bij mijn streven om mijn leerlingen het beste les te geven.

Maar als we niet stilstaan bij hoe leerlingen nadenken en leren, hoe kunnen we ze dan in vredesnaam effectief lesgeven? Een leraar die dat niet doet, is net als een dokter die niet stilstaat bij hoe het lichaam functioneert, of een bakker die slechts gedeeltelijk geïnteresseerd is in de optimale omstandigheden om brood te laten rijzen.

INSPIRATIEBRONNEN

- Anderson, J.R. (1996). ACT: A simple theory of complex cognition. *American Psychologist*, 51(4), 355-365.
- Anderson, R.C. (1977). The notion of schemata and the educational enterprise: General discussion of conference. In: R.C. Anderson,

- R.J. Spiro & W.E. Montague (red.), *Schooling and the Acquisition of Knowledge* (pp. 415-431). Hoboken, NJ: Wiley.
- Bartlett, F.C. (1932). *Remembering: A study in Experimental and Social Psychology*. Cambridge: Cambridge University Press.
 - Bjork, R.A. (1975). Retrieval as a memory modifier. In R.L. Solso (red.), *Information Processing and Cognition: The Loyola Symposium* (pp 123-144). Mahwah, NJ: Erlbaum.
 - Coe, R. (2013). *Improving Education: A Triumph of Hope over Experience*. Inaugurele rede, CEM; <http://www.cem.org/attachments/publications/ImprovingEducation2013.pdf>
 - Cowan, N. (2010). The magical mystery four: How is working memory capacity limited, and why? *Current Directions in Psychological Science*, 19(1), 51-57.
 - Kirschner, P.A., Sweller, J., & Clark, R.E. (2006). Why minimal guidance during instruction does not work: An analysis of the failure of constructivist, discovery, problem-based, experiential, and inquiry-based teaching. *Educational Psychologist*, 41(2), 75-86.
 - Mayer, R.E. (2008). Applying the science of learning: Evidence-based principles for the design of multimedia instruction. *American Psychologist*, 63(8), 760-769.
 - Mccrea, P. (2017). *Memorable Teaching: Leveraging Memory to Build Deep and Durable Learning in the Classroom*. CreateSpace Independent Publishing Platform.
 - Piaget, J. (1928). *Judgement and Reasoning in the Child*. New York: Harcourt.
 - Sweller, J., Merriënboer, J.J.G. van, & Paas, F.G.W.C. (1998). Cognitive architecture and instructional design. *Educational Psychology Review*, 10(3), 251-296.
 - Wiliam, D. (2017). Memories are made of this. *TES Magazine*.
 - Willingham, D.T. (2009). *Why Don't Students Like School? A Cognitive Scientist Answers Questions About How the Mind Works and What it Means for the Classroom*. Hoboken, NJ: Wiley.
 - Willingham, D.T. (2017). On the Definition of Learning. *Science and Education Blog*; <http://www.danielwillingham.com/daniel-willingham-science-and-education-blog/on-the-definitionof-learning>

 WAT IK ERVAN OPSTAK

Omdat nadenken en leren zulke belangrijke onderdelen van het lesgeven zijn, vormen ze ook een cruciaal element in dit boek. Ik vind het daarom noodzakelijk om zo vroeg mogelijk een model van nadenken en leren te introduceren. Hoewel elke poging om zoiets ingewikkelds als de menselijke cognitie terug te brengen tot een simpel model tal van beperkingen kent, denk ik dat Dylan Wiliam het goed uitlegde in zijn artikel in *TES* uit 2017: ‘wat een model waardevol maakt, is niet hoe accuraat het is – we kunnen tenslotte elk model accurater maken door het complexer te maken; de waarde zit hem eerder in de uitruil tussen simpliciteit en kracht. Dit is in het bijzonder van belang wanneer we het hebben over het menselijk brein, naar alle waarschijnlijkheid het meest complexe ding in dit universum.’

Tussen al het toonaangevend onderzoek naar dit onderwerp zit gelukkig zoveel gemeenschappelijke grond dat we best een basismodel kunnen opstellen van hoe nadenken en leren plaatsvindt, en dat ons ook goed van pas komt bij wat volgt.

Hoe leerlingen denken

Volgens Willingham (2009) vindt denken plaats wanneer informatie op nieuwe manieren gecombineerd wordt, en is het succes hiervan afhankelijk van vier factoren: de informatie afkomstig uit de omgeving, de feiten die zijn opgeslagen in het langetermijngeheugen, de procedures in het langetermijngeheugen, en de ruimte in het werkgeheugen. Als een van deze factoren ontoereikend is, zal het denken hoogstwaarschijnlijk niet op leren uitlopen.

Laten we eens wat nauwkeuriger kijken naar deze geheugencomponenten.

Langetermijngeheugen

Het langetermijngeheugen kan volgens Mccrea (2017) beschouwd worden als een mentaal model van de wereld: een kaart die we zelf construeren, waarop feiten, procedures, mindsets en overtuigingen staan aangegeven. **Het langetermijngeheugen representeert wat we weten en wie we zijn, en informeert ons over hoe we handelen.** Het heeft voor zover

we weten een onbeperkte capaciteit. Alle informatie die ligt opgeslagen in het langetermijngeheugen bestaat buiten ons bewustzijn en wacht daar geduldig totdat het nodig is. Als het moment zich aandient, treedt deze informatie het werkgeheugen binnen en worden we ons ervan bewust.

In dit boek zal ik voor de feiten en de procedures die liggen opgeslagen in het langetermijngeheugen de overkoepelende term ‘kennis’ gebruiken. Als ik dus zeg dat mijn leerlingen voldoende kennis over breuken moeten hebben, dan bedoel ik daarmee dat ze relevante feiten moeten kennen, zoals wat een noemer is en dat driekwart meer is dan een kwart. Maar ik wil ook dat ze de relevante procedures kennen, zoals het optellen, vereenvoudigen en delen van breuken. Ik wil ook dat zo veel mogelijk van hun kennis geautomatiseerd is, zodat leerlingen zonder erbij na te denken weten dat 12 de helft van 24 is, en dat om breuken op te kunnen tellen de noemers gelijk moeten zijn, zonder dat ze daarbij hun werkgeheugen belasten. Iets verderop in dit boek zal het nodig zijn om de aard van deze kennis specifiek te benoemen, zeker in paragraaf 3.9, wanneer ik het ga hebben over procedurele beheersing en conceptueel begrip, evenals de eeuwige vraag omtrent de volgorde van het Hoe en het Waarom. Maar voorlopig kunnen we kennis gewoon beschouwen als met elkaar verbonden feiten en procedures die opgeslagen liggen in het langetermijngeheugen, en die het ons als mens toestaan om te functioneren.

Deze kennis wordt in het langetermijngeheugen opgeslagen en georganiseerd in de vorm van *schema's* (zie Piaget, 1928; Bartlett, 1932; en Anderson, 1977). In een schema worden meerdere elementen van gerelateerde informatie samengevoegd of ‘samengeklonterd’ tot één enkel element met een specifieke functie. Zo kun je dus beschikken over een schema voor het optellen van breuken, waarin alle informatie die je in de loop der jaren hebt verzameld ligt opgeslagen. Deze *schema's* kunnen eindeloos complex zijn, en er kunnen er eindeloos veel worden opgeslagen in het langetermijngeheugen. Volgens de pleitbezorgers van de cognitievebelastingtheorie (bijv. Sweller et al., 1998) is het ontwikkelen van tienduizenden van deze domeinspecifieke *schema's* noodzakelijk om cognitieve overbelasting tijdens het oplossen van problemen te voorkomen, evenals het automatiseren van de benodigde kennis door oefening. Daarom is het langetermijngeheugen niet slechts een grote kennisdatabank; het is een integraal onderdeel van alle cognitieve activiteit.

Volgens de *Adaptive Character of Thought (ACT-R)*-theorie van Anderson (1996) ontstaat complexe cognitie uit een interactie van declaratieve en procedurele kennis. Declaratieve kennis is de feitelijke kennis die benoemd of omschreven kan worden, en de kleinste eenheid hiervan is een brok. Procedurele kennis daarentegen is dynamisch en bevat regels, ook wel producties genoemd, die het denken geleiden. Declaratieve kennis kan vlot ontstaan door directe codering uit de omgeving, terwijl de ontwikkeling van procedurele kennis langer duurt en wordt samengesteld uit declaratieve kennis door middel van oefening. Na een zekere mate van oefening wordt het productiep pad stabiel en heeft procedureel leren plaatsgevonden.

Het is van belang om te beseffen dat psychologen en wiskundeleraren er verschillende opvattingen over *procedures* op nahouden. Psychologen zien een procedure vooral als iets wat afgeleid wordt uit impliciete kennis, zoals het strikken van schoenveters of het besturen van een auto. Hoewel wiskunde ook dergelijke vormen van procedures kent – zoals experts die vloeiend breuken optellen of vergelijkingen herschikken –, heeft het ook procedures die afhankelijk zijn van meer expliciete herinneringen, zoals het langzaam en methodisch doorwerken van een goniometrie probleem dat uit meerdere fasen bestaat. Maar de essentie is wel hetzelfde: de omstandigheden waaronder we procedures aanleren, worden bepaald door reeds aanwezige declaratieve kennis.

Andersons model levert twee belangrijke bevindingen op, waarnaar we in dit boek voortdurend zullen terugkeren:

- 1) Reeds aanwezige kennis maakt nadenken en leren makkelijker;
- 2) Wanneer we eenmaal iets geleerd hebben – of dat nu klopte of niet –, is het vrijwel onmogelijk om af te leren. Kortom: oefening baart niet per se kunst, maar **oefening baart wel permanentie**.

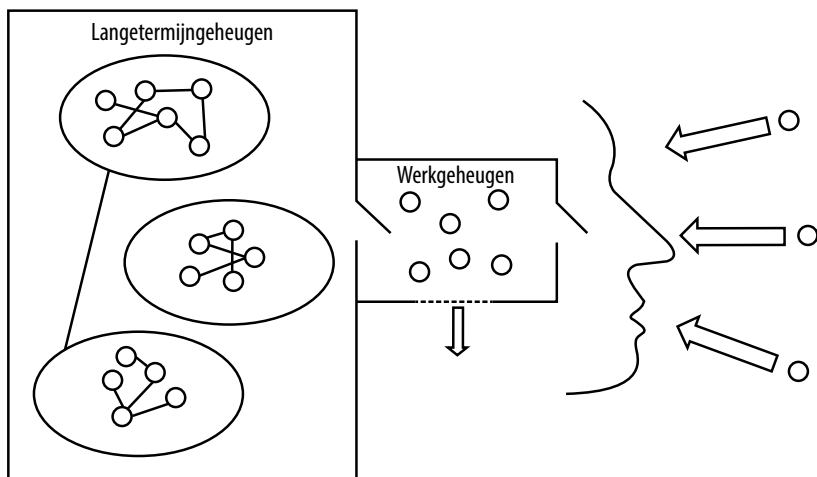
Werkgeheugen

Het werkgeheugen kan het best omschreven worden als de plek waar het nadenken plaatsvindt. Het draait helemaal om het hier-en-nu. In tegenstelling tot het langetermijngeheugen heeft het werkgeheugen slechts een beperkte capaciteit. Cowan (2010) schat zelfs in dat we slechts vier items tegelijk in het geheugen kunnen vasthouden en verwerken. De cognitievebelastingtheorie (zie bijvoorbeeld Sweller et al., 1998, en hoofd-

stuk 4 van dit boek) gaat voornamelijk over de beperkingen van het werkgeheugen.

Centraal in deze theorie staat de manier waarop iemands cognitieve bronnen gericht en gebruikt worden om te leren tijdens het probleemoplossen. Een belangrijke conclusie uit deze theorie is dat, wil instructie effectief zijn, men ervoor moet zorgen dat de capaciteit voor het verwerken van informatie niet overbelast raakt. Als dit wel gebeurt, vindt er geen leren plaats. Dit probleem kunnen we voorkomen door onze instructie zorgvuldig vorm te geven, door aan elkaar gerelateerde informatie samen te voegen tot brokken en door essentiële kennis te automatiseren.

Als we deze aan elkaar gerelateerde benaderingen samennemen, kunnen we een sterk versimpeld model van het denken van leerlingen schetsen. Dit model gaan we in dit boek nog voortdurend bijstellen en uitbreiden, maar de fundamentele zullen hetzelfde blijven. Het model ziet er als volgt uit.



Figuur 1.1 Bron: Craig Barton

De kleine cirkeltjes in de figuur geven eenheden van kennis weer, de ova- len zijn schema's, de lijnen verbindingen. Het denken vindt plaats in het werkgeheugen en is gericht op de wisselwerking tussen de omgeving en wat we kunnen terughalen uit het langetermijngeheugen. Hoe meer kennis we hebben opgeslagen en georganiseerd in het langetermijngeheugen en hoe meer van deze kennis geautomatiseerd is, des te eenvoudiger het

denken wordt en des te meer dingen we in gedachten kunnen houden. Kennis zorgt ervoor dat leerlingen meer informatie kunnen opnemen, beter over nieuwe informatie kunnen nadenken en meer nieuwe informatie kunnen onthouden.

Dit eenvoudige model heeft grote implicaties voor lesgeven en leren, en dat is wat we in dit hoofdstuk en dit boek (en het volgende deel) verder zullen uitdiepen.

Hoe leerlingen leren

Er bestaan veel verschillende definities van wat leren is, maar de definitie die ik in dit boek wil gebruiken komt van Kirschner, Sweller en Clark (2006), die leren definiëren als **‘een verandering in het langetermijngeheugen’**. Zij stellen dat als er geen verandering in het langetermijngeheugen heeft plaatsgevonden, er ook niets geleerd is. Het werkgeheugen is het hulpmiddel waarmee deze verandering bewerkstelligd kan worden.

Ik moet hier opmerken dat niet iedereen het eens is met deze definitie. In een blog dat hij in 2017 schreef merkt Daniel Willingham op dat deze definitie niet aangeeft hoelang deze verandering in het langetermijngeheugen moet voortduren (als het slechts enkele uren blijft hangen, telt het dan ook?), en ook niet benoemt dat de verandering positieve gevolgen moet hebben (als iemands langetermijngeheugen verandert wegens alzheimer, noemen we dit dan ook leren?). In hoofdstuk 12 van deel 2 gaan we dieper in op het eerste punt: de duurzaamheid van leren, en hoe dit kan worden verbeterd. Het tweede punt valt buiten het inhoudelijke bereik van dit boek, maar in paragraaf 3.8 zullen we wel stilstaan bij de verwerving van incorrecte informatie en hoe ingewikkeld het is om dit op te lossen.

Onze definitie van leren suggereert dat de kennis in het langetermijngeheugen niet statisch is. Op basis van nieuwe ervaringen vergaren we nieuwe kennis, passen we bestaande kennis aan en veranderen of accommoderen we deze, waardoor kennis makkelijk of minder makkelijk toegankelijk wordt. Dit is allemaal prachtig beschreven door Mccrea (2017), die uitlegt dat kennis ‘als resultaat van ons denken en onze interacties met onze omgeving voortdurend evolueert en verdwijnt. Ons langetermijngeheugen lijkt meer op een bos dan op een bibliotheek.’

Volgens Coe (2013) **vindt leren plaats wanneer mensen hard moeten nadenken**, en het is inderdaad zo dat het veranderen van het langetermijngeheugen naar alle waarschijnlijkheid inspanning vergt. Er zijn twee hoofdroutes waardoor een dergelijke verandering kan plaatsvinden, en ze lopen in tegengestelde richting:

Van werkgeheugen naar langetermijngeheugen

Leerlingen doen nieuwe ideeën op in relatie tot de ideeën die ze al hebben. Iemand die leert, houdt informatie vast in het werkgeheugen en maakt dan verbindingen tussen de informatie en de kennis die ligt opgeslagen in het langetermijngeheugen (aangenomen dat deze kennis aanwezig is). Willingham (2009) stelt dat ‘begrijpen een verkapt herinneren is’ – correcte, oude ideeën uit het langetermijngeheugen in het werkgeheugen plaatsen en herschikken, om zo nieuwe verbindingen mogelijk te maken. Dit houdt bijvoorbeeld in dat wanneer een leerling voor het eerst algebraïsche breuken tegenkomt, hij (hopelijk) de verbindingen legt tussen de bestaande, georganiseerde kennis van niet-algebraïsche breuken, algebraïsche regels, factoren en zo verder. Als hij daar niet toe in staat is – ofwel vanwege cognitieve overbelasting, ofwel doordat deze kennis niet bestaat in het langetermijngeheugen –, dan vindt naar alle waarschijnlijkheid geen leren plaats. Als nieuwe ideeën, informatie, feiten en procedures daarentegen succesvol verwerkt worden in het werkgeheugen, dan kunnen ze geassimileerd worden in een bestaand schema, of er kan een geheel nieuw, ermee verbonden schema worden gecreëerd, waardoor het langetermijngeheugen verandert.

Van langetermijngeheugen naar werkgeheugen

Wanneer informatie succesvol teruggehaald wordt uit het langetermijngeheugen naar het werkgeheugen, verandert de representatie van deze informatie in het langetermijngeheugen dusdanig dat ze in de toekomst beter toegankelijk wordt. Door van onze herinneringen gebruik te maken veranderden we onze herinneringen – of, zoals Bjork (1975) het stelde: ‘**iets uit het geheugen terughalen is een krachtige manier om het geheugen aan te passen.**’ Het terughalen van een feit uit het geheugen kan zodoende dus resulteren in leren. Deze nogal verrassende route naar leren is het onderwerp van hoofdstuk 12 van deel 2, en ik beloof je dat het de moeite van het wachten waard is.

WAT IK NU DOE

Ik denk nu veel na over ... tja, nadenken, en in het bijzonder hoe ik mijn les zo kan vormgeven dat:

- 1) mijn leerlingen gaan nadenken over de juiste dingen;
- 2) hetgeen waarover ze nadenken ook in het langetermijngeheugen terecht komt;
- 3) wanneer het in het langetermijngeheugen opgeslagen ligt, het ook toegankelijk is;
- 4) het ook succesvol kan worden toegepast in verschillende situaties.

Ik zal mijn best doen om deze vier punten in dit boek en het in het volgende deel nader uit te werken.

1.2 Experts en beginners

WAT IK VROEGER DACHT

Ik was ervan overtuigd dat ik beginners kon leren om expert te worden door ze gewoonweg als expert te behandelen. Ik modelleerde hoe experts denken, gaf ze op experts gerichte opdrachten en moedigde ze vooral aan om te ploeteren. Mijn aanpak versilde niet zoveel van wat ik aan het begin van elk schooljaar vertelde aan mijn verse havo-5-klas: 'Ik ga jullie behandelen als volwassenen, dus gedraag je daar ook naar.' Verrassend genoeg reageerden zowel de havo-5'ers als de beginners in mijn lessen niet zoals ik gehoopt had.

INSPIRATIEBRONNEN

- Barton, C. (2017). Andrew Blair. Mr Barton Maths Podcast; <http://www.mrbartonmaths.com/blog/andrew-blair-inquiry-maths/>
- Didau, D. (2017). A Novice Expert Model of Learning. *The Learning Spy Blog*; <https://learningspy.co.uk/learning/novice-expert-model-learning/>
- Hill, N.M., & Schneider, W. (2006). Brain changes in the development of expertise: Neuroanatomical and neurophysiological evidence about skill-based adaptations. In: K.A. Ericsson, N. Charness, P.J. Feltovich

- & R.R. Hoffman (red.), *The Cambridge Handbook of Expertise and Expert Performance* (pp. 653–682). Cambridge: Cambridge University Press.
- National Research Council (2000). *How People Learn: Brain, Mind, Experience, and School* (uitgebreide editie). Washington, D.C.: National Academies Press.
 - Wiemann, C. (2007). The ‘curse of knowledge’, or why intuition about teaching often fails. *APS News*, 16(10), 9.

WAT IK ERVAN OPSTAK

Als ik ooit een onderwijstatoeage neem – ongetwijfeld slechts een kwestie van tijd –, dan zou daarop staan: **‘Experts denken anders dan beginners’**. Het onderscheid tussen het leren van experts en het leren van beginners en de implicaties hiervan voor het lesgeven vormen de kern van dit boek. Het kan zomaar het belangrijkste zijn wat ik geleerd heb van iedereen die ik heb gesproken voor mijn podcast en wat ik naar aanleiding daarvan heb gelezen. Experts weten niet alleen meer dan beginners, ze denken ook op een fundamenteel andere manier.

Wat is een expert?

Voordat we verdergaan, moeten we eerst definiëren wat een *expert* is en wat een *beginner*. Het zijn termen die regelmatig voorbijkomen in de literatuur, maar hoe weten we wanneer iemand een mate van expertise bereikt heeft?

Het Oxford-woordenboek definieert een expert als ‘iemand die veel weet of heel vaardig is op een bepaald vlak’. Je kunt beargumenteren dat leerlingen op school nooit de status van expert zullen bereiken voor het vak wiskunde, maar ik denk wel dat we expertise kunnen aantreffen in bepaalde *smalle domeinen* in zowel het primair als het voortgezet onderwijs. Leerlingen kunnen expert worden in specifieke onderwerpen, zoals tafels, het optellen van breuken of het oplossen van lineaire vergelijkingen. Dit roept natuurlijk de valide vraag op over welke tafels, welke soorten breuken en welke mate van complexiteit van de vergelijkingen we het hebben. Maar we kunnen als regel stellen dat hoe smaller het domein, met des te meer zekerheid we expertise kunnen aanwijzen.

Expertise is gebonden aan een domein, niet aan een persoon. Ik ben bijvoorbeeld een expert in cirkelstellingen – ik kan er zelfs geen genoeg van krijgen –, maar ik ben waardeloos in koken, dingen repareren of al die andere dingen waar ik in het echte leven vermoedelijk meer aan zou hebben dan het subtiële gebruik van cirkelstellingen. Dit geldt ook voor leerlingen die wiskunde krijgen. Het is te simpel om de beste leerlingen te bestempelen als experts en de zwakste als beginners. Ik heb genoeg leerlingen gehad die excelleerden bij alle algebraïsche onderwerpen, maar heel veel moeite hadden met de geometrische kanten van wiskunde, zoals het identificeren van tweedimensionale rechthoekige driehoeken in driedimensionale figuren. Zelfs binnen een redelijk smal domein als wiskunde is iedereen wel ergens een beginner in, zeker wanneer we voor het eerst een bepaald concept tegenkomen. Zoals we in dit boek zullen zien, kan het vervelende gevolgen hebben als we een leerling foutief bestempelen als expert en hem of haar ook als dusdanig behandelen.

Het is evenmin zo dat mensen ofwel een expert, ofwel een beginner zijn binnen een bepaald domein, zonder dat daar iets tussen zit. De overgang van beginner naar expert is continu en vaag, zonder duidelijke grenslijn. Het is in elk geval zeker niet zo dat gedurende een lesperiode, of wanneer de leerlingen een bepaalde redeneerlijn hebben gevolgd, er een lichtje boven hun hoofd begint te branden en ze een badge ontvangen zoals ze die wellicht verdienen bij games als *Call of Duty*. Mensen zullen zich op verschillende tijdstippen in verschillende stadia bevinden. Wat op dit punt ook niet onbelangrijk is, is dat een gebrek aan oefening, slechte instructie en de ontwikkeling van misvattingen ervoor kunnen zorgen dat leerlingen niet altijd de juiste richting opgaan.

Gegeven deze problemen kan het interessant lijken om de labels ‘expert’ en ‘beginner’ maar helemaal te schrappen, maar dat zou ik jammer vinden. Mensen met een sterke domeinspecifieke kennis denken en leren zo verschillend vergeleken met mensen met een zwakke domeinspecifieke kennis, dat het belangrijk is om er rekening mee te houden in onze lessen. Hoewel dus niemand een expert of een beginner genoemd kan worden, moeten we wel een poging wagen om de relatieve expertise van leerlingen bij specifieke onderwerpen te bepalen. Dit is moeilijk, maar met de technieken van formatieve evaluatie (zie deel 2, hoofdstuk 11) en toetsen waarbij weinig op het spel staat (deel 2, hoofdstuk 12) is het wel mogelijk

om waardevolle informatie te verzamelen die ons kan helpen om betere beslissingen te nemen.

Kortom, wanneer je in dit boek de termen ‘expert’ en ‘beginner’ aantreft, wees dan gewaarschuwd, maar schuif ze ook niet terzijde. Denk niet dat expert-leerlingen behoren tot een of andere discrete, absolute categorie. Beschouw ze als leerlingen die verder gevorderd zijn op het pad van expertise binnen een bepaald domein, zo smal mogelijk gedefinieerd.

Hoe verschilt het denken van experts en beginners?

Hill en Schneider (2006) leggen uit dat expert-leerlingen verschillen van beginners in termen van hun kennis, inspanning, herkenning, analyse, strategie, geheugengebruik en monitoring, en dat deze verschillen te verklaren zijn vanuit een andere structuur van het langetermijngeheugen. Terwijl we leren, verandert onze hersenstructuur en worden gedachten anders verwerkt. Dit betekent dat terwijl we meesterschap bereiken in een bepaalde vaardigheid of concept, onze hersenen andere verbindingen aanleggen tussen onze langetermijnherinneringen. Met hersenscans zijn daadwerkelijke verschillen in activatiepatronen te zien tijdens probleemoplossen. Zij concluderen vervolgens dat ‘experts niet alleen efficiënter verwerken, verrijker representeren en hun geheugenstructuur uitbreiden, maar hun denkstrategieën ook flexibel kunnen inzetten door de geassocieerde hersenregionen aan te spreken om een reeks aan problemen op te lossen, terwijl beginners dit niet kunnen.’

Didau (2017) ziet twee ijkpunten voor expertise, die zeer relevant zijn voor wiskunde:

1. GEAUTOMATISEERDE BASISKENNIS

Kijk eens naar het volgende probleem.

Hoeveel is 25 % van € 300?

Hoe ging dat? Hoelang deed je erover om tot het antwoord (€ 75) te komen? Ik kan me voorstellen dat je het antwoord vrij snel en met minimale inspanning hebt berekend. Waarschijnlijk kwam het antwoord zelfs ineens in je op, zonder dat je bewust hebt stilgestaan bij wat je precies deed. Je herkende onmiddellijk en onbewust het procentteken en wat het betekent, en je wist dat 25 % hetzelfde is als een kwart. Je hebt deze kennis geautomatiseerd, en het neemt dus geen ruimte in binnen je werkgeheugen. Je hebt ook de procedure geautomatiseerd die je nodig hebt om een kwart van iets te berekenen, dus je kunt snel een kwart van € 300 uitrekenen door de helft en dan nog eens de helft te nemen, zonder dat je werkgeheugen wordt belast. Je kunt dit allemaal omdat je een expert bent. Je kunt deze berekening waarschijnlijk ook doen terwijl je muziek op de achtergrond hoort, je partner vraagt waarom je de afwas nog niet hebt gedaan, of tijdens het jongleren. Doordat je veel van de benodigde kennis geautomatiseerd hebt, houdt je ruimte over in je werkgeheugen om aandacht te besteden aan andere zaken.

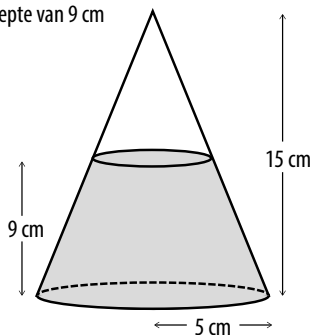
Een beginner is vermoedelijk ook in staat om 25 % van € 300 te achterhalen, maar dit zal hem veel meer cognitieve inspanning kosten. Hij zal de vraag niet spontaan interpreteren, hij zal zich er wellicht niet van bewust zijn dat 25 % hetzelfde is als een kwart, en wellicht begint hij met 10 % te berekenen, en hij zal vervolgens moeten bedenken hoe hij dat gaat aanpakken. Dat moet ook nog eens herhaald worden voor 5 %, en de uitkomsten hiervan moeten dan allemaal worden samengevoegd. Uiteindelijk hebben jullie allebei het antwoord goed, maar voor jou als expert was het een stuk makkelijker.

Als we het verschil tussen experts en beginners en het automatiseren van basiskennis goed willen begrijpen, moeten we kijken naar ingewikkeldere problemen. Laten we bijvoorbeeld eens kijken naar de volgende, moeilijke examenopdracht, waarbij geen rekenmachine mag worden gebruikt.

VOLGENS BARTON

Inhoud van de kegel = $\frac{1}{3}\pi r^2 h$ waarbij r de straal is en h de hoogte.

Een kegel heeft een
horizontaal grondvlak met als straal 5 cm
hoogte van 15 cm
De kegel bevat water met een diepte van 9 cm



Bereken de inhoud van het water in de kegel, in cm^3 .
Geef je antwoord in termen van π .

[4 punten]

Figuur 1.2 Bron: AQA 2017 GCSE Maths Higher Paper 1

Komt het antwoord nu ook weer ineens in je op? Waarschijnlijk is deze opgave zowel voor jou als voor de beginnende leerling cognitief belastend, maar het verschil tussen jullie twee is dat jij alle benodigde basiskennis geautomatiseerd hebt. Het kost jou geen enkele moeite om te bedenken wat elke term in de formule betekent, hoe je 5 moet kwadrateren, hoe je een derde moet vinden of wat het pi-symbool betekent. Daardoor houd jij cognitieve capaciteit over om aandacht te besteden aan de globalere aspecten van deze opdracht, zoals het correct interpreteren van de vraag en het opstellen van een strategie om tot een oplossing te komen. Het is niet alleen waarschijnlijker dat je deze opdracht oplost, je bent ook nog eens beter in staat om van deze opdracht te leren. Een beginnende leerling die de belangrijkste informatie nog niet heeft geautomatiseerd, wordt waarschijnlijk gehinderd door de details in deze opdracht, zal cognitieve overbelasting ervaren en zal waarschijnlijk niets leren wat overdraagbaar is. Meer hierover vind je in hoofdstuk 9 van deel 2, over probleemoplossen.

**2. HET VERMOGEN OM DIEPERE STRUCTUUR TE ONTDEKKEN
BINNEN EXPERTISEDOMEINEN**

Inzien waar opgaven echt over gaan, kan voor leerlingen een van de moeilijkste vaardigheden zijn om onder de knie te krijgen. Maar wat als ik je vertel dat het geen vaardigheid is, tenminste niet in dezelfde zin als dat het optellen van twee breuken een vaardigheid is? Het is een onderdeel van het expert-zijn. Beschouw eens de volgende examenvraag, en vraag je daarbij eens af waar de opgave nu eigenlijk om draait.

De gemiddelde leeftijd van de leraren op school is 36 jaar.

De leeftijd van meneer Smit is $\frac{11}{9}$ van het gemiddelde.

Hoe oud is meneer Smit?

[2 punten]

Antwoord _____ jaar

Figuur 1.3 – Bron: AQA 2017 GCSE Maths Foundation Paper 2

Hoelang duurde het voordat je doorhad dat hier eigenlijk gevraagd wordt naar $\frac{11}{9}$ van 36? Hoe was je in staat om de irrelevante, potentieel afleidende oppervlaktestructuren van ‘leeftijd’, ‘school’ en ‘gemiddelde’ te vermijden?

Ongetwijfeld deed je dit best vlot, en je was daartoe in staat omdat je een expert bent. Je ervaring met het beantwoorden van tal van dit soort vragen, de behoorlijke hoeveelheid aan kennis die je hebt opgeslagen in je langetermijngeheugen en de ook niet onbehoorlijke manier waarop jouw kennis is georganiseerd, stellen je in staat om niet in te gaan op de oppervlakkige kenmerken van deze opdracht, maar om te identificeren wat de diepere structuur ervan is.

Zouden al je leerlingen hiertoe in staat zijn, dus zien wat er eigenlijk gevraagd wordt? Ik weet dat veel van mijn leerlingen dat niet kunnen. Het vermogen om de diepere structuur van een probleem te identificeren en niet afgeleid te raken door de oppervlakkigheden is een belangrijk

element van expertise, en dit heeft grote gevolgen voor het oplossen van problemen.

De vloek van kennis

Deze twee belangrijke verschillen tussen beginners en experts kunnen tot onbegrip leiden bij ons als leraren, juist omdat we zelf expert zijn. We lijden aan de ‘vloek van kennis’ (zie bijv. Wieman, 2007): wanneer je iets al weet, kan het moeilijk zijn om het perspectief in te nemen van iemand die het nog niet weet.

Veel van onze wiskundige kennis is geautomatiseerd, en we kunnen daarom basisprocessen uitvoeren zonder een groot beroep te doen op ons werkgeheugen. Op dezelfde manier kunnen we ook diepere structuren in een opdracht herkennen zonder precies te weten hoe we daartoe in staat waren. Dit kan het – althans voor mij – heel moeilijk maken om een probleem vanuit het perspectief van de leerlingen te bekijken, om begrip op te brengen voor de moeilijkheden die ze hebben, en om ze te helpen deze op te lossen. Ik kan me simpelweg niet meer herinneren hoe het was om bovengenoemde opgaven niet te kunnen oplossen, en dat is een probleem.

De vloek van kennis is de reden dat vakkennis op zichzelf nooit voldoende is om een goede leraar te zijn, en waarom het niet altijd een goed idee is om leerlingen die een bepaald concept al wel begrepen hebben, te vragen om iemand anders te helpen die het nog niet heeft begrepen. Beginners kunnen niet denken als experts, en experts kunnen niet denken als beginners, en de uitwisseling tussen deze verschillende leerlingen kan daarom voor beide partijen frustrerend zijn. Alleen door middel van ervaring kun je begrijpen hoe leerlingen denken en daarbij vastlopen, maar een goed begrip van de meest voorkomende misvattingen van leerlingen is wel van groot belang. We zullen dit bespreken in hoofdstuk 11 van deel 2.

In het verleden probeerde ik mijn leerlingen expert te laten worden door simpelweg expertise te modeleren. Ik ging ervan uit dat ik ze kon helpen expert te worden door te laten zien hoe ik opgaven benader en aanpak. Dit is geen geheel vruchteloze exercitie, maar ik miste wel een belangrijk punt, namelijk dat je over een grote hoeveelheid domeinspecifieke kennis moet beschikken om überhaupt als een expert te kunnen denken. Dit is

waarom ik wél kan automatiseren en diepere structuur kan herkennen. Totdat deze kennis is bijgebracht, geoefend, getoetst en teruggehaald, zijn al onze pogingen om leerlingen tot expert te maken waarschijnlijk vergeefs.

WAT IK NU DOE

Ik ben er over het algemeen te snel van uitgegaan dat leerlingen expert waren, of heb ze te snel gepoogd een expert te laten worden door voor te doen hoe een expert denkt. Ik ben mij nu zeer bewust van het fundamentele belang van domeinspecifieke kennis. Dát is de onderscheidende factor tussen beginners en experts. Dergelijke kennis helpt onze leerlingen om beter na te denken, nieuwe kennis op te doen, iets aan zichzelf uit te leggen, problemen op te lossen en zo zelfstandige leerlingen te worden. Het helpt ons ook om de optimale instructietechnieken in te zetten om ze effectiever te laten leren. Zonder zulke kennis, verdoemen we leerlingen tot een eeuwig ‘beginnerschap’, en hoe vaak we ook voordoen hoe ze anders zouden kunnen denken, het zal hen niet helpen.

Dit boek gaat primair over hoe we leerlingen kunnen helpen om kennis op te doen en deze te onthouden.

1.3 Waar denken leerlingen over na?

WAT IK VROEGER DACHT

Ik vond altijd dat lessen memorabel moesten zijn om ... tja, om ze beter te laten hangen bij de leerlingen. Dit leidde tot het cakerol-incident (Bolton, Lancashire, 2014).

Ik gaf dat jaar les aan een fijne brugklas, en we waren net aan het einde gekomen van een hoofdstuk over breuken. We hadden al het basismateriaal behandeld, en het werd nu tijd om al deze aangeleerde vaardigheden in verschillende contexten toe te passen. Daarom gaf ik ze de volgende opdracht op om thuis eens over na te denken:

Stel je voor dat je 7 cakerollen hebt en ze op elkaar stapelt. Wat is dan het minste aantal sneden dat je met een mes moet maken om ervoor te zorgen dat 12 mensen precies evenveel cake krijgen, en er niets overblijft?

Die avond, terwijl mijn leerlingen nadachten over dit smakelijke vraagstuk, ging ik naar de supermarkt en kocht daar voor £ 12,96 aan cakerollen (de luxe variant). Ik was voorbereid voor een fantastische les. En dat werd het ook.

Gewapend met een plastic mes en een keukenrol presenteerde ik de realistische, praktische oplossing van de opgave. Room en jam vlogen in het rond, en een kwart van een cakerol (die er erg smakelijk uitzag) ging voor eeuwig verloren op de stoffige vloer van het klaslokaal. Maar uiteindelijk hadden we het volbracht. Wiskunde in actie, en de kinderen vonden het fantastisch.

Inmiddels zitten deze leerlingen in de vierde klas, en helaas geef ik ze geen les meer. Toevallig kwam ik een paar dagen geleden een van hen tegen op de gang, en na het uitwisselen van wat vriendelijkheden vroeg ik hoe het nu ging met wiskunde:

‘Niet slecht, meneer, maar het is wel saai.’

‘Hoe bedoel je? Wiskunde kan niet saai zijn!’

‘Nou ja, het is wel oké, denk ik, maar we doen nooit meer iets leuks, zoals de les met die opgerolde cakes uit de brugklas.’

‘Veronica, gewoon even uit interesse, weet je nog waar die les over ging?’

‘Over opgerolde cake natuurlijk!’

En daar zit precies het probleem.

INSPIRATIEBRONNEN

- Barton, C. (2017). Peps Mccrea. Mr Barton Maths Podcast; <http://www.mrbartonmaths.com/blog/peps-mccrea-planning-memorable-teaching-and-teacher-expertise/>
- Coe, R. (2013). *Improving Education: A Triumph of Hope over Experience*. Inaugurele rede, CEM; <http://www.cem.org/attachments/publications/ImprovingEducation2013.pdf>
- TES (2015). Experimental Probability – Bottle Flipping; <https://www.tes.com/teaching-resource/experimental-probabilitybottle-flipping-11478338>
- Willingham, D.T. (2003) ‘Ask the cognitive scientist: Students remember ... what they think about’. *American Educator*, 27(2), 37-41.

- Willingham, D.T. (2008). What will improve a student's memory? *American Educator*, 32(4), 17-25.
- Willingham, D.T. (2009). *Why Don't Students Like School? A Cognitive Scientist Answers Questions About How the Mind Works and What it Means for the Classroom*. Hoboken, NJ: Wiley.

WAT IK ERVAN OPSTAK

Zodra de inkt van mijn 'Experts denken anders dan beginners'-tatoeage opgedroogd is, wordt de volgende: '**Geheugen is wat overblijft na denkwerk**'. Ik denk dit de belangrijkste zinnen zijn die leraren moeten onthouden. Beide komen prominent terug in dit hele boek, maar het is de tweede van deze juweeltjes, die bedacht is door Willingham (2003), die het onderwerp is van deze paragraaf:

Geheugen is wat overblijft na denkwerk, oftewel: leerlingen onthouden datgene waarover ze hebben nagedacht.

Denk nog eens terug aan het model van denken dat we in paragraaf 1.1 hebben besproken. Voordat we kunnen gaan nadenken over zaken als werkgeheugencapaciteit, relevante schema's, transfer en probleemoplossen, moeten we ons er eerst van verzekeren dat wat de leerlingen in hun werkgeheugen verwerken ook datgene is wat ze zouden moeten verwerken. Leren is een verandering in het langetermijngeheugen, maar als de daarvoor relevante ideeën, vaardigheden en concepten hun weg al niet hebben gevonden naar het werkgeheugen, dan vindt het gewenste leren überhaupt niet plaats. Het is alsof we een superdeluxe sapcentrifuge hebben, maar er vervolgens steeds een pastinaak in stoppen.

In de les die ik hierboven beschreven heb, hoopte ik dat mijn leerlingen gingen nadenken over breuken, maar ze gingen daarentegen nadenken over jam. Waar ik graag wilde dat hun werkgeheugen zich vulde met gemeenschappelijke noemers, factoren van 12 en reeksen van gelijkwaardige breuken, raakte het juist gevuld met gedachten aan room, hoe hongerig ze waren en het feit dat meneer Barton jam op zijn bril had zitten. Leerlingen onthouden datgene waarover ze hebben nagedacht. Het was dus geen wonder dat Veronica zich niet de inhoud van mijn les, noch de oplossing van het probleem kon herinneren. (De oplossing was trouwens drie sneden.)

Als ik eenmaal de mantra ‘Geheugen is wat overblijft na denkwerk, dus leerlingen onthouden datgene waarover ze hebben nagedacht’ in mijn hoofd heb gebeiteld, ga ik ook andere overwegingen maken in mijn lesontwerp, en ga ik zaken in een ander licht beschouwen. Zo huiverde ik toen ik lesmateriaal tegenkwam over *bottle flipping* en kansberekening, dat bekroond was met vijf sterren. Dit is de omschrijving die de auteur er zelf aan gaf:

Ik ontwierp deze PowerPoint als motiverende activiteit voor een laatste les voor de vakantie voor mijn vierdejaars havo-leerlingen, waarin ze de relatie tussen de hoeveelheid water en de kans van een succesvolle bottle flip kunnen onderzoeken. Ik gebruik dit materiaal om het thema kansberekening weer te herhalen, maar het onderzoek beslaat uiteraard ook het verzamelen van data, een beetje breuken, decimalen en procenten, enzovoort. Ik weet dat bottle flippen een beetje moeilijk ligt, maar een deel van mijn klas was echt heel gemotiveerd aan de slag, en zo staken ze ook nog wat op over experimentele waarschijnlijkheid.

Ik wil graag geloven dat de leerlingen gemotiveerd aan de slag waren, maar waarmee? De preciezere punten van kansberekening, of de beste techniek om een opgegooid flesje op zijn bodem te laten landen?

Dit brengt ons mooi op het onderwerp van betrokkenheid. Er wordt vaak beweerd dat leerlingen betrokken moeten zijn om te leren, en het realiseren daarvan kan een dominant doel van lesgeven worden. Maar staat betrokkenheid ook gelijk aan leren? Niet per se, volgens Coe (2013). In zijn veelbesproken lijst van ‘slechte graadmeters voor leren’ staat ook de situatie waarin ‘leerlingen betrokken, geïnteresseerd en gemotiveerd zijn’.

Coe beweert niet dat betrokkenheid het leren in de weg staat, en hij ontkent evenmin dat betrokkenheid het leren kan ondersteunen. Wat hij wel beweert, is dat de betrokkenheid bij de les op zichzelf onvoldoende garandeert dat er ook leren plaatsvindt. De cakerol- en *bottle flipping*-lessen zijn hier klassieke voorbeelden van. Als iemand tijdens een van deze lessen naar binnen zou lopen, weet ik zeker dat hij een oceaan aan betrokken, geïnteresseerde en gemotiveerde leerlingen zou aantreffen. Maar het probleem is natuurlijk waar ze precies bij betrokken zijn. Tenzij we verder bewijs hebben (bijvoorbeeld door hun kennis te toetsen), moeten we heel voorzichtig zijn met de conclusie dat hier leren heeft plaatsgevonden.

Zou Veronica zich wel de les over breuken herinnerd hebben als ik de cakerollen thuis had gelaten? Waarschijnlijk niet. Maar zou ze de wiskundige inhoud ervan wel onthouden hebben? Ik denk het wel. Ik kan me het precieze moment niet herinneren waarop ik breuken leerde optellen, vergelijkingen leerde oplossen of een boomdiagram leerde tekenen. Maar ik kan het wel allemaal, en dat komt door lessen waarin zo veel mogelijk van mijn aandacht gericht was op denken – hard nadenken – over datgene waar mijn wiskundeleraar op gedoeld had.

Zeg ik hiermee dus dat wiskundelessen saai moeten zijn? Zeker niet. Ik geloof dat alle leerlingen plezier en motivatie kunnen halen uit het leren en beheersen van wiskunde. Maar wat ik wil zeggen is dat er een reëel risico is dat leerlingen zich vastklampen aan de oppervlakkige structuur van de leservaring, soms in dusdanige mate dat hun werkgeheugen overbelast raakt en er te weinig ruimte overblijft voor andere zaken. En als dit het geval is, moeten we heel voorzichtig zijn met de oppervlakkige structuren van een les, want dat zijn de dingen die ze waarschijnlijk zullen onthouden.

WAT IK NU DOE

Willingham (2009) adviseert het volgende: ‘beschouw elke lesvoorbereiding in termen van waar een leerling hoogstwaarschijnlijk over zal nadenken. Dit is wellicht het meest algemene en bruikbare idee dat de cognitieve psychologie te bieden heeft aan leraren.’

Toen ik Peps Mccrea interviewde voor mijn podcast, stelde hij een bruikbare verfijning van Willingham's bewering voor: **leerlingen onthouden datgene waar ze aandacht aan besteden**. Hoewel de onderliggende bedoeling hetzelfde is, denkt Peps dat het meer kans van slagen heeft als leraren hun leerlingen richten op waar ze aandacht voor moeten hebben dan op waar ze over moeten nadenken.

Als ik een les voorbereid, stel ik me inmiddels dus de vraag: *waar besteden leerlingen aandacht aan in dit stadium van de les?* En als het antwoord hierop niet datgene is waarvan ik wil dat ze er aandacht aan besteden, dan verander ik mijn lesvoorbereiding. Ik kan de aandacht van mijn leerlingen natuurlijk niet geheel beheersen, en zelfs een perfect voorbereide les kan mislukken doordat leerlingen er met hun gedachten niet bij zijn. Ik kan mijn kansen hierop echter wel vergroten via bepaalde lesactiviteiten, en ook via de

algemene principes van goed instructieontwerp die ik zal bespreken in hoofdstuk 4.

Ik maak me ook minder druk over betrokkenheid – het staat op een verre tweede plaats wanneer ik lessen voorbereid die gericht zijn op leren, omdat ik me gerealiseerd heb dat het pad van betrokkenheid naar leren niet zo helder is als ik vroeger weleens dacht. Natuurlijk wil ik dat mijn leerlingen geïnteresseerd zijn in het werk dat ze aan het doen zijn, maar ik heb het gevoel dat er een meer betrouwbare en duurzamere manier is om dit te bereiken (meer hierover in hoofdstuk 2).

Dus: geen cakerollen of *bottle flipping* meer. Geen ‘maak een PowerPoint of een poster’ om de stof te herhalen, waarbij leerlingen meer bezig zijn kleuren, lettertypes en animaties dan met de wiskundige inhoud. Nee, geen Tarsia-puzzels meer die ze zelf moeten uitknippen, waarbij het recht knippen van de driehoekige stukken meer aandacht opeist dan de wiskunde. En ook geen kaartspelletjes meer, waarbij de leerlingen meer bezig zijn met wanneer hun volgende beurt is, bang worden om voor een groep te spreken, of de aandacht laten verslappen zodra hun beurt geweest is.

1.4 Het werkgeheugen uitbreiden

WAT IK VROEGER DACHT

Mijn gebrekkige kennis over het werkgeheugen bracht me tot wat ik toen een ontzettend belangrijk inzicht vond: als ik nu eens het werkgeheugen van mijn leerlingen kon vergroten, dan zou ik toch in staat moeten zijn om daar meer informatie in te stoppen, waardoor ze vervolgens meer zouden kunnen leren? Deze openbaring bracht me tot de onvermijdelijke conclusie dat de sleutel tot succesvol denken hersentraining was. Er is tenslotte een hele miljoenenindustrie gebouwd rondom de belofte dat het werkgeheugen daadwerkelijk vergroot kan worden.

Om een lang verhaal kort te maken: mijn derdejaars gingen elke week aan de slag met hersentraining, onder de toepasselijke naam *The Mr Barton Brain Training Programme*.

Een van mijn favoriete websites was www.brainmetrix.com. Je kunt daar een verontrustend verslavend geheugenspelletje spelen, dat draait

om het onthouden van een reeks knipperende rechthoeken. De website beweert: ‘Hier kun je je geheugen testen, testen helpt je om je geheugen te verbeteren, dit spel stimuleert vele gebieden in je hersenen die gebruikt worden voor het opslaan en terughalen van informatie. Je verbetert je geheugen terwijl je plezier hebt!’

Dit is echt perfect, dacht ik. Dit is precies het wetenschappelijke inzicht waar ik mijn leerlingen mee verder kan helpen. Dit gaat werken.

Maar na dit een aantal weken uitgeteerd te hebben, en nadat ik mijn leerlingen ook nog eens had aangemoedigd om thuis te oefenen, gebeurde er iets interessants. De leerlingen leken inderdaad de capaciteit van hun werkgeheugen vergroot te hebben door het geheugenspel te spelen – een leerling haalde zelfs level 21, terwijl ik niet hoger kwam dan level 12 –, maar hun wiskundig denken leek niet te verbeteren. Ergens klopte iets niet.

INSPIRATIEBRONNEN

- Engle, R.W., & Kane, M.J. (2003). Executive attention, working memory capacity, and a two-factor theory of cognitive control. In: B.H. Ross (red.), *Psychology of Learning and Motivation*, Vol. 44 (pp. 145-199). San Diego, CA: Elsevier.
- Melby-Lervåg, M., & Hulme, C. (2013). Is working memory training effective? A meta-analytic review. *Developmental Psychology*, 49(2), 270.

WAT IK ERVAN OPSTAK

Het eerste wat ik hierover wil opmerken is dat mijn intuïtie het (eindelijk) eens bij het juiste eind had. Een grotere werkgeheugencapaciteit lijkt inderdaad het denken makkelijker te maken. Zoals Engle en Kane (2003) het stelden, ‘een van de robuustere en, zo denken wij, interessante en belangrijke bevindingen in het onderzoek naar het werkgeheugen is dat de bandbreedte van de werkgeheugencapaciteit een sterke voorspeller is van een groot aantal cognitieve vermogens van hogere orde, waaronder de taalbeheersing, het redeneren en zelfs de algemene intelligentie.’

Dit valt goed te begrijpen vanuit het model van denken dat we in paragraaf 1.1 geïntroduceerd hebben. Hoe groter de werkgeheugencapaciteit, des te meer ideeën, informatie, feiten en procedures we tegelijk kunnen vasthouden en verwerken. Stel dat we deze capaciteit oneindig konden

uitbreiden, dan zou het belang van de systemische verwerving van kennis, zoals dat een thema is in dit boek, overboord gegooid kunnen worden. Waarom zou je de moeite doen om kennis te leren en op te slaan als je alles gewoon in het werkgeheugen kwijt kunt wanneer je het nodig hebt, om het dan te verwerken en weer uit te spugen?

Toonde mijn leerling die level 21 had gehaald dus niet dat ze in staat was om 21 eenheden aan informatie tegelijkertijd in haar werkgeheugen op te slaan?

Helaas niet. In een meta-analyse concludeerden Melby-Lervåg en Hulme (2013) dat de voordelen van zulke oefeningen slechts van korte duur zijn, en dat er ook geen overdracht plaatsvindt naar andere situaties. Je kunt jezelf dus wel leren om meer van een specifiek soort geschreven of gesproken informatie op te slaan, maar dit zal zich niet vertalen naar het vermogen om complexere wiskunde problemen op te lossen. Mijn leerling had waarschijnlijk een heel geraffineerde manier gevonden om deze 21 stukjes informatie te organiseren in grotere delen, maar deze vaardigheid hielp haar niet om een algebraprobleem van 21 stappen makkelijker te verwerken. Sterker nog, ze was thuis zoveel tijd kwijt aan het tellen van knipperende paarse vormen dat ze minder tijd besteedde aan haar huiswerk. Het effect op haar wiskunde prestaties was dus precies omgekeerd aan wat de bedoeling was geweest.

WAT IK NU DOE

Ik ben helaas gestopt met het *Mr Barton Brain Training Programme*, maar niet alles is daarmee verloren gegaan. In plaats van me te richten op de grootte van het werkgeheugen, zorg ik nu dat dit gevuld wordt met de juiste dingen, door de principes van de cognitievebelastingtheorie en de cognitieve theorie van multimediaal leren – dat ik in hoofdstuk 4 zal bespreken – toe te passen. Ik maak ook gebruik van de oneindige capaciteit van het langetermijngeheugen, door ervoor te zorgen dat leerlingen domeinspecifieke kennis verwerven en ermee oefenen. Ik doe dit door expliciete instructie toe te passen (hoofdstuk 3) en zorgvuldig voorbereide opdrachten te geven (hoofdstuk 7, deel 2). Dit helpt mijn leerlingen vervolgens om schema's te vormen die het denken en probleemoplossen makkelijker maken.

1.5 Methoden die blijven

WAT IK VROEGER DACHT

Normaal gesproken bereidde ik mijn lessen voor door te kijken naar de opdrachten die leerlingen aan het einde van een paragraaf of hoofdstuk moesten kunnen maken, en probeerde ik ze de beste methode bij te brengen om deze te kunnen maken. Wat kan daar nou mis mee zijn?

Nou ... laten we eens kijken naar het onderwerp van lineaire vergelijkingen oplossen, en hoe ik dit deed met mijn brugklassers. Een snelle blik op mijn vakwerkplan leerde me dat ze aan het einde van het onderwerp *inleiding in de lineaire vergelijkingen in staat moeten zijn om tweestaps lineaire vergelijkingen op te lossen, waarbij de variabele aan één kant staat, en waarin negatieve getallen kunnen voorkomen.*

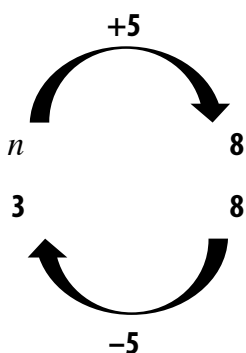
Zelfs toen al was ik tegen het trucje van ‘verander van kant, verander van teken’, aangezien het een methode is die vaak wordt misbruikt (ik ben het aantal keren al vergeten waarbij ‘gedeeld door min 5’ op magische wijze veranderde in ‘vermenigvuldigen met plus 5’), en bovendien niet gebouwd is op een solide wiskundig fundament. Ik was echter wel een groot fan van de aanpak die bekendstaat als ‘ik denk aan een getal’, wat in Nederland ook wel ‘rekenen met rekenpijlen’ wordt genoemd.

Mijn les begon dan ongeveer zo: *Ik denk aan een getal, ik tel er 5 bij op, en dan krijg ik 8. Met welk getal ben ik begonnen?* De leerlingen vertelden me gretig dat het antwoord natuurlijk 3 moest zijn. ‘Hoe weten jullie dat?’, vroeg ik dan. Uiteindelijk konden we dan uitvogelen dat je 5 van 8 afhaalt om aan het antwoord te komen.

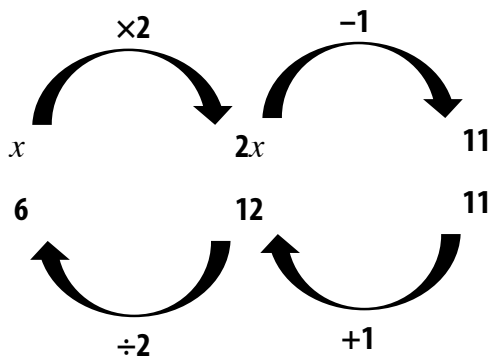
Ik zou dan verder uitleggen dat we ook tijd kunnen besparen (waar leerlingen over het algemeen dol op zijn) door het probleem te schrijven als $n + 5 = 8$, met daarbij de volgende rekenpijlen, waarmee ik subtiel concepten als een variabele en inverse operaties introduceer (zie fig 1.4).

Het mooie aan deze aanpak (althans, dat vond ik) was dat ze complexere problemen op een soortgelijke manier konden oplossen. Bijvoorbeeld: ik denk aan een getal, ik vermenigvuldig met 2, trek er 1 van af, en ik krijg dan 11. Dit werd dan $2x - 1 = 11$, dat we konden oplossen door het volgende diagram te gebruiken (zie fig 1.5).

VOLGENS BARTON



Figuur 1.4 – Bron: Craig Barton



Figuur 1.5 – Bron: Craig Barton

Aan het einde van de les konden mijn brugklasleerlingen zelfs de volgende vergelijking oplossen – een vergelijking op examenniveau, zoals ik ze trots mededeelde:

$$\frac{4(2x - 3)}{5} + 6 = 10$$

Mijn leerlingen hadden veel vooruitgang geboekt, algebra was niet langer eng, en ze beheersten nu zelfs een methode die gebruikt kon worden om vergelijkingen te herschikken. Het was precies deze les die me de beoordeling ‘uitmuntend’ had opgeleverd tijdens mijn eerste inspectiebezoek, toen ik nog maar net begonnen was met lesgeven. Applaus voor jezelf! Ik had dat lesgeven al binnen een paar maanden onder de knie.

De enige domper in het feestgedruis was dat mijn leerlingen geen idee hadden hoe ze vergelijkingen als $5 - x = 3$ of $3x - 2 = x + 4$ konden oplossen, maar ach, deze vergelijkingen zouden ze pas volgend jaar tegenkomen, dus waarom zou ik me daar nu al druk over maken?

INSPIRATIEBRONNEN

- Anderson, J.R. (1996). ACT: A simple theory of complex cognition. *American Psychologist*, 51(4), 355-365.
- Barton, C. (2017). Dani Quinn – Part 1. Mr Barton Maths Podcast; <http://www.mrbartonmaths.com/blog/dani-quinn-part-1-michaela-school-planning-lessons-low-stakes-tests/>

- Sweller, J., Merriënboer, J.J.G. van, & Paas, F.G.W.C. (1998). Cognitive architecture and instructional design. *Educational Psychology Review*, 10(3), 251-296.

WAT IK ERVAN OPSTAK

Laten we eens bedenken, aan de hand van het model van denken dat we in paragraaf 1.1 bespraken, wat er gebeurt wanneer leerlingen die via rekenpijlen vergelijkingen hebben leren oplossen een vergelijking als $3x - 2 = x + 4$ tegenkomen. De x en het gelijkteken maken meteen duidelijk dat het hier gaat om een vergelijking. Dit zet een zoekopdracht naar relevante schema's in gang in het langetermijngeheugen. En jawel hoor, daar vinden ze een goed ontwikkeld schema voor het oplossen van vergelijkingen. Het probleem is alleen dat geen van de vergelijkingen in het langetermijngeheugen lijkt op deze nieuwe vergelijking.

Dus wat doet een leerling dan? Die zal bijvoorbeeld proberen om het probleem op te lossen met behulp van een inefficiënte strategie – bijvoorbeeld met een variatie op inklemmen –, wat waarschijnlijk een groot beslag legt op zijn of haar kwetsbare werkgeheugen. En, zoals we in hoofdstuk 9 (deel 2) zullen zien, een dergelijke aanpak is niet per se bevorderlijk voor het leren, zelfs als leerlingen het juiste antwoord weten te achterhalen. Of ze zullen proberen een bestaand, gebrekkig schema toe te passen, dat wel tot de verkeerde oplossing moet leiden, en tot de mogelijke ontwikkeling van een mijnenveld aan begripsproblemen die later weer opgelost moeten worden. Het is waarschijnlijk het beste voor iedereen om de hele vraag maar weg te laten.

Stel je nu eens voor dat je de leraar bent van een tweede klas die is opgegroeid met mijn dieet van rekenpijlen. Wat doe je dan? De enige optie is dan om de leerlingen een andere manier aan te leren om lineaire vergelijkingen op te lossen, die bruikbaar is voor dit nieuwe type vragen – hoogstwaarschijnlijk een variant van de balansmethode. Je hebt dan twee opties: je vertelt ze dat ze dit verkeerde pad moeten verlaten, wat ze waarschijnlijk niet graag doen omdat het zo'n gemakkelijke methode is, en bovendien véél beter dan die nieuwe methode die je ze probeert aan te leren. Of je geeft ze een complexe set regels om te bepalen wanneer ze welke oplossingsmethode moeten toepassen, wat er in feite op neerkomt dat ze

voor elke variatie een ander schema moeten ontwikkelen, en zo ontwikkelt wiskunde zich dus tot een onsamenhangend samenraapsel van betekenisloze regeltjes, precies zoals veel volwassenen en leerlingen wiskunde beschouwen. Beide benaderingen zijn niet erg kansrijk, en dat is ongetwijfeld geheel en al mijn schuld.

Inschatten wanneer je het je leerlingen moeilijk of makkelijk moet maken is ook een terugkerend thema in dit boek, en dit is typisch een voorbeeld waarbij een ingewikkelde formele methode te verkiezen is boven snelle trucjes.

Pas toen ik voor mijn podcast Dani Quinn interviewde, sectievoorzitter wiskunde van de Michaela Community School, begon ik hier voor het eerst over na te denken. Als het aankomt op het oplossen van vergelijkingen, onderwijst Dani haar leerlingen vanaf de eerste dag in de balansmethode.

Balansmethode ☺

$$3x + 7 = 22$$

$$\quad -7 \quad -7$$

$$3x = 15$$

$$\frac{3x}{3} = \frac{15}{3}$$

$$x = 5$$

Figuur 1.6 – Bron: Craig Barton

En dit is dan ook nog eens een niet-onderhandelbare, schoolbrede aanpak voor het oplossen van lineaire vergelijkingen. De methode waarborgt een consistente aanpak door haar collega's en een stevige algebraïsche basis voor haar leerlingen. Natuurlijk is deze aanpak aanvankelijk wel moeilijker onder de knie te krijgen, en natuurlijk lijkt het alsof de leerlingen minder 'voortgang' boeken dan leerlingen die met rekenpijlen werken, maar de balansmethode is uiteindelijk een duurzamere aanpak voor het oplossen van vergelijkingen.

WAT IK NU DOE

Ik denk goed na over de aanpak die ik mijn leerlingen aanleer, en stel mezelf daarbij drie vragen:

- Hoelang zullen ze deze aanpak gebruiken?
- Hoe kan ik voortborduren op deze aanpak?
- Is de aanpak gebaseerd op een stevige wiskundige basis?

Als het nodig is, leer ik mijn leerlingen dus een manier die op de korte termijn moeilijker te leren is, maar op de lange termijn meer oplevert. Als ik het gevoel heb dat mijn leerlingen niet klaar zijn voor zo'n ingewikkelde methode, kom ik erop terug op het moment dat ze er wel klaar voor zijn.

1.6 Wiskundefobie

WAT IK VROEGER DACHT

Ik dacht altijd dat als het op een wiskundefobie aankomt, er twee typen leerlingen bestaan:

1. degenen die moeite hebben met wiskunde, en die wiskundefobie ervaren juist omdat ze het moeilijk vinden;
2. de slimme leerlingen, die beweren dat ze bang zijn, maar die stiekem prima kunnen meekomen.

Ik vond de eerste groep altijd makkelijker om mee om te gaan dan de tweede, omdat ik hun angst kon begrijpen. Toen ik op school zat, was ik echt slecht in handvaardigheid. De les vond altijd plaats op donderdagochtend en ik zag er de hele week tegen op. Ik lag letterlijk de hele woensdagnacht wakker van angst. Tijdens de les was ik een angstig hoopje ellende. Plots waren de simpelste taken, zoals het hameren op een spijker of het spreken van een coherente zin, te moeilijk voor me. Het ging zelfs zo ver dat het gevoel van opluchting dat de les voorbij was al verdween rond lunchtijd, waarna mijn zorgen over de les van volgende week alweer begonnen.

Ik was bang voor handvaardigheid omdat ik er slecht in was, en daarom had ik ook geen moeite om leerlingen te begrijpen die aangaven dezelfde

fobie te hebben voor wiskunde. Waar ik een minder goede verklaring voor had, waren de zeer goede leerlingen die beweerden dat wiskunde hen met dezelfde angstgevoelens vervulde, terwijl ze altijd hoge cijfers haalden. Wat mij betreft waren dit gewoon aanstellers.

Als ik er zo op terugkijk, schaam ik me er toch wel voor dat ik niet wist hoe heftig een wiskundefobie kan zijn.

INSPIRATIEBRONNEN

- Ashcraft, M.H. (2002). Math anxiety: Personal, educational, and cognitive consequences. *Current Directions in Psychological Science*, 11(5), 181-185.
- Beilock, S.L., & Willingham, D.T. (2014). Math anxiety: Can teachers help students reduce it? Ask the cognitive scientist. *American Educator*, 38(2), 28.
- Caviola, S., Carey, E., Mammarella, I.C., & Szucs, D. (2017). Stress, time pressure, strategy selection and math anxiety in mathematics: A review of the literature. *Frontiers in Psychology* 8, 1488.
- O’Leary, K., Fitzpatrick, C.L., & Hallett, D. (2017). Math anxiety is related to some, but not all, experiences with math. *Frontiers in Psychology* 8, 2067.
- Ramirez, G., Gunderson, E.A., Levine, S.C., & Beilock, S.L. (2013). Math anxiety, working memory, and math achievement in early elementary school. *Journal of Cognition and Development*, 14(2), 187-202.
- Wong, M., & Evans, D. (2007). Improving basic multiplication fact recall for primary school students. *Mathematics Education Research Journal*, 19(1), 89-106.

WAT IK ERVAN OPSTAK

Ashcraft (2002) omschrijft wiskundefobie als ‘een gevoel van spanning, vrees, of angst dat de wiskundeprestaties in de weg staat’. Een van de trieste gevolgen van een wiskundefobie is dat ze veel leerlingen ervan weerhoudt om hun potentieel te verwezenlijken. Volgens Beilock en Willingham (2014) ondervindt tot wel 80 % van de leerlingen in de Verenigde Staten een redelijke tot hoge mate van wiskundefobie. De meeste leerlingen hebben ten minste één negatieve ervaring met wiskunde gedurende hun schoolloopbaan.

Ashcraft vat dertig jaar aan onderzoek naar wiskundefobie samen, en hoewel daar allemaal belangrijke punten tussen zitten, sprong een aantal daarvan mij in het oog.

1) *Leerlingen met een hevige wiskundefobie vermijden wiskunde*

Natuurlijk kunnen de meeste leerlingen formeel niet onder wiskunde uit, maar informeel zeker wel. Ze kunnen thuis minder oefenen, minder meedoen tijdens de les en smoesjes verzinnen om onder opdrachten uit te komen. En omdat oefenen bij wiskunde zo belangrijk is voor succes, komen we al snel in een vicieuze cirkel terecht, waarin vermijden leidt tot verminderde prestaties, wat onvermijdelijk weer bijdraagt aan de reeds bestaande wiskundefobie.

2) *Een wiskundefobie hangt nauwelijks samen met de algemene intelligentie*

Dit was een verrassing voor mij. Ik nam aan dat er een sterke negatieve correlatie moest bestaan tussen intelligentie en wiskundefobie, maar nu ik er nog eens over nadenk, waren er heel wat leerlingen die heel goed waren in wiskunde, maar een irrationele angst (tenminste, zo dacht ik in mijn onwetendheid) hadden voor het vak.

3) *Toetsen met een tijdslimiet zorgen voor angst*

De derde bewering van Ashcraft plaatst ons voor een dilemma. Ten eerste hebben alle officiële examens een tijdsaspect, en op een bepaald moment zullen leerlingen daar dus mee moeten leren omgaan. Ten tweede concluderen Wong en Evans (2007) dat het zonder tijdsdruk onwaarschijnlijk is dat leerlingen bepaalde getalenkennis gaan automatiseren, waardoor ze hun werkgeheugen hadden kunnen vrijspelen. Een leerling die bijvoorbeeld 6 met 8 wil vermenigvuldigen, maar dit doet door zessen op te tellen op zijn vingers, is flink in het nadeel wanneer hij een complex probleem moet oplossen waarbij hij deze kennis moet gebruiken, ten opzichte van een leerling die automatisch weet dat het antwoord 48 is. De sleutel is hier vermoedelijk om het tijdselement langzaam en voorzichtig te introduceren binnen een ondersteunende omgeving, in combinatie met een toetsbeleid waarin minder cijfers worden gegeven, en de cijfers niet publiekelijk worden medegedeeld. Dit hangt samen met de aanpak met quizjes waarbij weinig op het spel staat, die we zullen behandelen in hoofdstuk 12 van deel 2.

De associatie die hier gelegd wordt tussen toetsen met een tijdslimiet en wiskundefobie wordt overigens niet door iedereen geaccepteerd. Caviola en collega's (2017) deden een literatuurstudie over de afgelopen dertig jaar over het effect van stress en/of tijdsdruk op wiskundeprestaties. Ze concluderen dat 'de aanname dat er een causaal verband bestaat tussen tijdsdruk en het opwekken van een wiskundefobie niet berust op wetenschappelijk bewijs.'

4) *Een wiskundefobie verlaagt de prestaties doordat ze essentiële ruimte inneemt in het werkgeheugen*

Ik word me ervan bewust dat ik zelf ook weleens last heb van een wiskundefobie, bij de ondersteuningslessen wiskunde B in vwo-6. Hoewel ik al twaalf jaar lesgeef aan vwo-6, word ik meestal toch verrast door een leerling met een ingewikkelde vraag. Het draait meestal om subvraag D in een epische opdracht van dertien punten, en terwijl ik dan half in paniek de vraag scan en ter plekke probeer het antwoord te bedenken, kan ik de verwachtingsvolle blik van de leerling voelen. En terwijl de seconden wegtikken en hun vertrouwen in mij langzaam afbrokkelt, begin ik langzaam iets te voelen in mijn hoofd. Iets begint mijn gedachten weg te duwen. En hoe meer ik me focus op dit gevoel, des te dominanter het wordt, en des te minder ik in staat ben om het probleem op te lossen. Het is een vicieuze cirkel, die ik regelmatig onderbreek door net te doen alsof ik even naar het toilet moet, zodat ik mezelf buiten het lokaal weer kan herpakken. Ashcraft geeft hiervoor een verklaring, en maakt ook duidelijk dat dit bij veel leerlingen regelmatig gebeurt: een wiskundefobie neemt waardevolle ruimte in het werkgeheugen in. Zoals we in paragraaf 1.1 al zagen – en we zullen dit verder uitwerken in hoofdstuk 4 over de cognitievebelastingstheorie – is het werkgeheugen van leerlingen kwetsbaar. Om gedachten succesvol te verwerken, hebben leerlingen alle capaciteit nodig die ze maar kunnen krijgen. Een wiskundefobie is zo te beschouwen als een externe last die het nadenken en leren belemmert.

5) *Een wiskundefobie vermindert niet de prestaties op alle wiskundeonderdelen – alleen op die onderdelen die cognitief belastender zijn*

Ook dit was goed terug te zien in de eerder genoemde ondersteuningslessen. De eenvoudige rekenkundige processen – zeker wanneer ze geautomatiseerd zijn – belasten het werkgeheugen slechts in beperkte mate, en

zijn daardoor ook minder kwetsbaar voor een wiskundefobie. De wat ingewikkeldere wiskunde belast daarentegen het werkgeheugen zwaarder, en valt daardoor ten prooi aan de wiskundefobie. De bittere ironie is dus dat wanneer leerlingen hun werkgeheugen het hardste nodig hebben om een opdracht op te lossen, de wiskundefobie hen het meest belemmert.

6) *Wanneer leerlingen met de moeilijkste wiskundeonderwerpen bezig zijn, is het vaak ingewikkeld om de effecten van een wiskundefobie goed te onderscheiden van die van een slechte wiskundebeheersing*

Dit is een groot probleem voor leraren. Heeft de leerling die niet op het goede antwoord kan komen een gebrek aan kennis, of heeft hij last van een wiskundefobie? Dat is belangrijk om te weten, omdat de oplossingen voor beide problemen verschillen.

Ramirez en collega's (2013) citeren een andere belangrijke vondst uit het onderzoek naar wiskundefobie, die zowel fascinerend als zorgwekkend is: 'leerlingen met de hoogste werkgeheugencapaciteit laten de meest uitgesproken negatieve correlatie zien tussen een wiskundefobie en wiskunde-prestaties'. De verklaring die de auteurs hiervoor geven, is dat leerlingen met een grotere werkgeheugencapaciteit meer gebruik maken van gevorderde probleemoplossingsstrategieën, juist omdat ze de capaciteit hebben om deze in het werkgeheugen te verwerken. Doordat hun werkgeheugen wordt verstoord door de wiskundefobie, kunnen deze leerlingen overstappen naar veel minder succesvolle probleemoplossingsstrategieën, om de belasting die veroorzaakt wordt door de wiskundefobie te vermijden. Het is wederom ironisch dat iets waarbij de leerlingen het meest gebaat zijn bij wiskunde – een groot werkgeheugen – het kwetsbaarst kan zijn bij een verstoring door een wiskundefobie.

WAT IK NU DOE

Omdat ik me nu realiseer dat leerlingen hinder kunnen ondervinden van een wiskundefobie, evenals hun leraren, neem ik het probleem heel serieus. Maar wat valt eraan te doen?

Het kan in elk geval geen kwaad om de volgende vier praktische strategieën, zoals beschreven door Beilock en Willingham (2014), toe te passen in de strijd tegen wiskundefobie.

1. *Zorg voor stevige basisvaardigheden.* Domeinspecifieke kennis maakt nadenken en leren makkelijker, en de automatisering van deze kennis vermindert de belasting van het werkgeheugen. De ontwrichtende effecten van een wiskundefobie worden hierdoor minder, omdat het werkgeheugen voldoende ontlast is om met de angst om te gaan.
2. *Bereid je lessen goed voor.* Dit is gebaseerd op het idee dat de wiskundefobie van de leraar overgedragen kan worden op de leerlingen. Zoals ik hierboven beschreef, overkomt dit me weleens tijdens lessen. Ik herinner me dat ik een paar jaar geleden een moeilijke les aan het geven was. Ik zat niet lekker in de lesstof, ik sloeg dicht tijdens het uitwerken van een voorbeeld, en het effect op de leerlingen was tastbaar. Je kunt zo iets misschien niet altijd vermijden, maar een goede voorbereiding en leservaring zijn essentieel in het voorkomen van dit fenomeen. Ik zou ook willen bepleiten dat een goed voorbereide les die gegeven wordt via het expliciete instructiemodel dat later in dit boek aan bod komt, met meer zelfvertrouwen te voltrekken is dan een les die minder geleid is.
3. *Verander de toetsing.* Het kan, zoals reeds omschreven, behulpzaam zijn om het tijdselement uit toetsing te halen, omdat het de druk kan verminderen en de leerlingen extra tijd geeft om over vragen na te denken. We moeten echter stilstaan bij de invloed hiervan op de ontwikkeling van geautomatiseerde kennis, net als de organisatie die nodig is om sommige leerlingen extra tijd te geven. We zullen deze punten later ook bespreken in het hoofdstuk 12 van deel 2 (over quizjes waarbij weinig op het spel staat).
4. *Overweeg zorgvuldig wat je zegt tegen leerlingen die moeite hebben.* Troostende woorden zoals ‘Het geeft niet, niet iedereen kan hier goed in zijn’ bevestigt vaak het perspectief van de leerling dat hij of zij niet goed is in wiskunde. Het is beter om je richten op je overtuiging dat inspanning ertoe zal leiden dat ze beter worden, en dit aanvult met concrete, effectieve leerstrategieën zoals beschreven in hoofdstuk 12 van deel 2.

Het is ook goed om een studie te noemen die is uitgevoerd door O’Leary en collega’s (2017). Zij kwamen erachter dat wanneer de leerlingen een hoge mate van ondersteuning van hun leraren ervaren, zij minder last hadden van wiskundefobie. Om specifieker te zijn, ‘was er een significante afname

van [wiskundefobie] te zien wanneer de deelnemers aangaven dat de leraar veel voorbeelden en oefenopdrachten gaf, en dit effect bleef wanneer we corrigeerden voor een algemene angst, of toetsfobie.' Een belangrijke redenering in dit boek is dat een model van expliciete instructie behulpzamer is dan minder geleide instructie, en dat een doordachte keuze van uitgewerkte voorbeelden een belangrijk onderdeel van dit model is. Voor wat het waard is: ik zie een grote verandering bij mijn leerlingen sinds ik dit instructiemodel hanteer. Ze zijn zelfverzekerder, stellen vaker vragen en omarmen hun fouten als de leermomenten die ze behoren te zijn, en bovenal zijn ze gewoon een stuk gelukkiger. Dit is ongetwijfeld een van de belangrijkste effecten die mijn nieuwe aanpak heeft teweeggebracht.

1.7 Als ik slechts drie dingen onthoud ...

1. Experts en beginners weten niet alleen andere dingen, ze denken ook op een fundamenteel andere manier.
2. Leerlingen onthouden datgene waarop ze hun aandacht hebben gericht. Daarom moeten we onze lessen voorbereiden en evalueren met dit principe als leidraad.
3. Iedereen kan last krijgen van een wiskundefobie. Het kan ontwrichtend werken, maar er zijn manieren om het tegen te gaan.